## 3. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

*Трудно отделаться от ощущения, что эти математические формулы существуют независимо от нас и обладают собственным разумом, что они умнее нас, умнее тех, кто открыл их, и что мы извлекаем из них больше, чем было в них первоначально заложено.*

Генрих ГЕРЦ

Первые серьезные результаты в области математического моделирования относятся естественно к механике. Одна из наиболее восхитительных задач классической механики, имеющая существенный теоретический интерес и многочисленные практические приложения, связана с процессом колебания маятника. В соответствии с описанной в Лекции № 1 процедурой осуществляется вывод уравнения движения математического маятника. В случае малых колебаний это уравнение оказывается линейным, а его решение – периодической функцией. Вычисляется энергия колебания маятника. С целью уточнения результатов учитывается влияние силы трения. Определяется положение равновесия маятника. Исследуются также вынужденные колебания маятника. В приложении рассматриваются колебания пружины, а также некоторые специфические задачи теории нелинейных колебаний.

### **ЛЕКЦИЯ**

#### **1. Вывод уравнения колебания маятника**

Основным объектом нашего исследования является ***маятник***. Он представляет собой массивное твердое тело, подвешенное на длинной тонкой нити. Форма и размеры тела, а также свойства нити в дальнейших исследованиях не учитываются. Таким образом, мы имеем дело с материальной точкой, обозначаемой через *М* и находящейся в состоянии покоя в нижнем конце нити (см. Рис. 3.1). Движение маятника осуществляется под действием силы тяготения и происходит в плоскости, образованной начальным положением нити и ее вертикальным состоянием – прямой *ОА*. Пренебрегая изменением длины нити, заключаем, что точка *М* неизменно находится на одном и том же расстоянии *l* от точки *О* закрепления нити. Рассматриваемый при этих допущениях идеализированный объект принято называть ***математическим маятником***[[1]](#endnote-1).

****

Рис. 3.1. Математический маятник.

Нам предстоит теперь выбрать функцию состояния системы, т.е. некоторую величину, характеризующую, как нам кажется, движение маятника. Здесь имеется определенная свобода выбора. В качестве функции состояния можно было бы выбрать отклонение маятника от вертикальной оси, т.е. отрезок *МВ*, изменение высоты маятника *ВМ*0 над землей по сравнению с его положением в точке *М*0, соответствующей вертикальному положению нити, а также угол *θ* между отрезками *ОМ* и *ОА*. Все эти три варианта эквивалентны, а соответствующие величины связаны следующими очевидными соотношениями:

*MB = l* sin *θ*, *ВМ*0 *= l* (1–cos *θ*).

В механике обычно принято в качестве функции состояния выбирать ***угол*** *θ*. Таким образом, нам предстоит установить характер его изменения со временем. Соотношения, позволяющие найти вид указанной функциональной зависимости, и составляет математическую модель рассматриваемого процесса.

В основе построения модели, как и в предыдущей лекции, лежит второй закон Ньютона, согласно которому ускорение маятника *а* в направлении его движения пропорционально действующей силе *F*. Тогда справедливо равенство *ma = F*, где *m* – масса маятника. Движение маятника в любой момент времени происходит в направлении, перпендикулярном текущему положению нити *ОМ* (см. Рис. 3.1). Интересующая нас сила представляет собой проекцию веса *Р* на направление движения маятника. В результате находим значение

*F =* –*P*sin*θ* =– *mg* sin*θ*.

Знак "минус" здесь обусловлен тем, что движение маятника происходит в сторону, противоположную его отклонению от вертикального положения, а возрастание угла почему-то принято отсчитывать в направлении против часовой стрелки.

Итак, второй закон Ньютона принимает следующий вид



где *v* – скорость маятника. Таким образом, получаем уравнение

 (3.1)

откуда сразу следует, что закон движения маятника не зависит от его массы.

Соотношение (3.1) устанавливает связь скорости движения маятника с углом *θ*, являющимся функцией состояния системы. Однако производной от функции *θ* является его ***угловая скорость*** *υ*, а не функция *v*, представляющая собой его линейную скорость. Таким образом, для преобразования полученного соотношения установить связь между функцией *v* и угловой скоростью маятника.

Предположим, что в момент времени *t* маятник находится в точке *M*(*t*) под углом *θ*(*t*) к оси *ОА*, а в момент времени *t*+*τ* – в точке *М*(*t*+*τ*) под углом *θ*(*t*+*τ*) (см. Рис. 3.2а). Обозначив через *r*(*τ*) расстояние между рассматриваемыми точками, найдем скорость маятника





Рис. 3.2. Вычисление угловой скорости.

Величина *r*(*τ*) определяется из равенства (см. Рис. 3.2*b*)



где  В результате находим величину



Учитывая очевидные равенства



установим, что скорость движения маятника определяется по формуле  Подставляя это значение в соотношение (3.1), получаем уравнение



Вводя параметр процесса  называемый ***частотой*** ***колебания маятника*** (точнее, его собственной частотой), получаем следующий вид уравнения движения

 (3.2)

Таблица 3.1. Основные элементы математической модели малых колебаний маятника.

|  |  |
| --- | --- |
| **элементы** | **характеристика** |
| объект исследования | математический маятник |
| функции состояния | угол, угловая скорость |
| независимая переменная | время |
| система координат | угол отсчитывается против часовой стрелки начало отсчета – положение равновесия |
| причина эволюции | маятник подвешен и имеет начальное положение,  на него действует сила тяготения |
| причинно-следственная связь | второй закон Ньютона |
| входные параметры | длина маятника,  начальный угол, начальная скорость, |
| условия  применимости модели | длина маятника положительна  начальный угол и начальная скорость достаточно малы |
| выходные характеристики | амплитуда, частота, период и фаза колебания |

Соотношение (3.2) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка[[2]](#endnote-2) относительно функции состояния *θ*. Это уравнение является ***нелинейным*** в том смысле, что сумма двух решений и произведение решения на число, никак не будут решениями рассматриваемого уравнения[[3]](#endnote-3). Нелинейные системы отличаются весьма изощренными свойствами, а их анализ связан с серьезными трудностями[[4]](#endnote-4). В частности, мы не имеем возможности найти ***аналитическое решение*** полученного уравнения, т.е. записать это решение в виде конкретной формы, выражающей его зависимость от времени и параметра *ω*0.

Задача существенно упрощается при рассмотрении ***малых колебаний*** маятника, когда значение синуса сколь угодно близко к величине самого угла, т.е. справедливо условие   
sin *θ* ≈ *θ*. В этом случае установим соотношение

 (3.3)

называемое ***уравнением гармонического осциллятора*** или ***уравнением колебания маятника***,точнее, малых свободных колебаний). Оно-то и будет лежать в основе дальнейшего анализа исследуемого процесса. Соотношение (3.3) является линейным однородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка[[5]](#endnote-5). Это уравнение имеет и другие физические интерпретации[[6]](#endnote-6), одно из которых приводится в Приложении. В заключительном подразделе будет рассмотрен неоднородный аналог уравнения (3.3).

Дифференцируя равенство (3.3) и учитывая, что производная от угла является угловой скоростью, получаем



Таким образом, угловая скорость маятника также удовлетворяет уравнения гармонического осциллятора[[7]](#endnote-7).

Для завершения математического описания процесса остается еще привести информацию о начальном состоянии системы. Предположим, что в момент времени *t* = 0 маятник находится под углом *θ*0 к вертикальной оси и имеет угловую скорость *υ*0. Тогда начальные условия принимают вид

 (3.4)

Соотношения (3.3), (3.4), составляющие задачу Коши[[8]](#endnote-8), являются математической моделью рассматриваемого процесса. Она включает в себя параметры *ω* (частоту колебания, определяемую длиной маятника), *θ*0 (начальное положение) и *υ*0 (начальную скорость). В Таблице 3.1, аналогичной приведенной в предшествующей лекции Таблице 1.2, представлены основные элементы рассматриваемой математической модели, причем указанные выходные характеристики будут установлены в ниже процессе решения полученной задачи.

Нам предстоит теперь провести математический анализ имеющейся задачи Коши и интерпретировать свойства ее решения.

***Движение маятника описываются   
нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка.  
Малые колебания маятника описываются   
линейным уравнением гармонического осциллятора.***

#### **2. Решение уравнения колебания маятника**

Вторая стадия исследования, как обычно, предполагает математический анализ полученной модели с целью извлечения информации, содержащейся в ней в скрытой форме. В соответствии с классической теорией линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами[[9]](#endnote-9) составляется ***характеристическое уравнение***

.

Оно представляет собой алгебраическое (квадратное) уравнение относительно параметра *λ* и имеет корни *λ*1 = *ω*0***i***, *λ*2 = –*ω*0***i***, где ***i*** – мнимая единица. Тогда общее решение уравнения (3.3) определяется по формуле

*θ*(*t*) = *c*1sin*ω*0*t* + *c*2 cos*ω*0*t*, (3.5)

где *c*1, *c*2 – произвольные постоянные[[10]](#endnote-10).

Для интерпретации полученных результатов решение удобнее записать в виде

*θ*(*t*) = *a*sin(*ω*0*t* + *ϕ*), (3.6)

где параметры *а* и *ϕ* называются соответственно, ***амплитудой*** и ***начальной фазой*** колебания[[11]](#endnote-11). Конкретные значения параметров *а* и *ϕ* определяются из условий (3.4). Пользуясь равенствами



находим величину начальной фазы и амплитуду колебания



Установленное решение задачи Коши (3.3), (3.4) оказывается ***периодической функцией***[[12]](#endnote-12) (см. Рис. 3.3) с ***периодом колебания*** *Т*=2*π*/*ω*0. Таким образом, маятник совершает колебания вокруг своего положения равновесия[[13]](#endnote-13). Максимальное отклонение маятника от его вертикального положения соответствует его амплитуде. Частота, фаза, амплитуда и период колебания являются важнейшими характеристиками колебательного процесса. Информация о них позволяет дать весьма интерпретацию полученных результатов, что составляет третий этап исследования задачи.



Рис. 3.3. Решение задачи (3.3), (3.4) – периодическая функция.

**Задание 3.1. *Гармонические колебания маятника***. На основе численного решения задачи (3.3), (3.4) провести следующий анализ:

1. Убедиться в том, что угол отклонения маятника от положения равновесия и его угловая скорость меняются со временем периодически.

3. Нарисовать график изменения со временем *t* точки с координатами  в плоскости, образованной функциями состояния системы, т.е. углом и угловой скоростью. Указанная плоскость называется ***фазовой***[[14]](#endnote-14). Убедиться, что получаемая в результате кривая является замкнутой. В частности, она представляет собой эллипс.

3. Меняя последовательно длину маятника, его начальное положение и начальную скорость, обнаружить изменение амплитуды, частоты и периода колебания. Проанализировать полученные результаты.

***Решением уравнения колебания маятника является периодическая функция.***

#### **3. Энергия колебания маятника**

При описании механического движения представляет интерес также энергия движущегося тела. Для формулировки закона изменения энергии запишем уравнение колебания маятника (3.3) в следующем виде



Умножая это соотношение на производную от функции *θ*, будем иметь



Учитывая установленное ранее условие  преобразуем предшествующее равенство к следующему виду



Отсюда после умножения на массу маятника *m* следует равенство

 (3.7)

Первое слагаемое в левой части равенства (3.7) представляет собой ***кинетическую энергию*** *К*. Потенциальная энергия маятника будет равна *U=mgh*, где значение *h* соответствует длине отрезка *ВМ*0на Рис. 3.1. Последняя является разностью между длиной маятника *l* и отрезком *OМ*0, равным *l*cos*θ*. Таким образом, справедливо равенство   
*U = lmg*(1–cos*θ*). В случае малости угла *x* получаем соотношение cos*θ* ≈ (1–*θ* 2/2). Следовательно, второе слагаемое в левой части равенства (3.7) соответствует в случае малых колебаний маятника его ***потенциальной энергии***. Вводя обозначения



установим соотношение

*K*(*t*) *+ U*(*t*) = const, (3.8)

выражающее ***закон сохранения энергии***. Конкретное значение в правой части равенства (3.8) определяется начальными значениями положения и скорости маятника, задающими соответственно, его потенциальную и кинетическую энергию в начальный момент времени.

Полученные результаты позволяют дать интерпретацию движения маятника с энергетической точки зрения. Предположим, к примеру, что в начальный момент времени маятник имеет некоторое отклонения от вертикального положения и нулевую начальную скорость. Тогда в начальный момент времени его кинетическая энергия будет равна нулю, а потенциальная – принимает некоторое значение, определяемое его начальным положением. По мере стремления маятника к вертикальному положению будет уменьшаться его отклонение от равновесия, а значит, и потенциальная энергия. Следовательно, в соответствии с условием (3.8) должна расти кинетическая энергия, а значит, и скорость движения. За время, равное четверти периода колебаний, маятник достигнет положения равновесия, характеризуемого нулевой потенциальной энергией. Таким образом, вся исходная потенциальная энергия перешла в кинетическую, что соответствует максимальной скорости движения. Далее по инерции маятник начнет отклоняться в противоположную сторону, приобретая некоторую потенциальную энергию. В соответствии с законом сохранения энергии его кинетическая энергия начинает падать, а маятник замедляет движение. По прошествии половины периода маятник остановится. Тем самым его кинетическая энергия полностью перейдет в потенциальную, в точности совпадающую с первоначальной (при сделанных предположениях энергия в процессе движения не теряется). Это означает, что маятник отклонился на такой же угол, что и в начальный момент времени, но в другую сторону. Затем процесс возобновляется, причем каждые четверть периода наблюдается переход из одного типа энергии в другой.

**Задание 3.2. *Энергия колебания маятника***. На основе численного решения задачи (3.3), (3.4) провести следующий анализ:

1. Убедиться в том, кинетическая и потенциальная энергии маятника меняются со временем периодически[[15]](#endnote-15). Обратить внимание на соотношение между минимальными и максимальными значениями этих характеристик.

3. На основе графика зависимости полной энергии системы от времени убедиться в справедливости закона сохранения энергии.

3. Установить характер влияния начальных условий, а также массы маятника на величину полной механической энергии маятника. Проанализировать полученные результаты.

***Сумма кинетической и потенциальной энергии маятника остается постоянной.***

#### **4. Колебание маятника при наличии трения**

Согласно формуле (3.6) решению уравнению рассматриваемой задачи соответствуют гармонические колебания маятника. Однако простейший эксперимент показывает, что в действительности реализуется иной ход развития событий. Вместо ожидаемого периодического изменения отклонения маятника от положения равновесия наблюдаемые на практике колебания со временем почему-то упорно затухают. Это наводит на мысль о том, что на исследуемый объект действует некоторая дополнительная сила, которая ощутимо тормозит его движение. С подобным эффектом нам уже приходилось встречаться при математическом описании задач о движении зонда и планера (см. Лекцию № 1). Таким образом, для получения более точной математической модели рассматриваемого явления непременно следует учесть влияние указанной силы, которая называется ***силой трения***[[16]](#endnote-16)и обозначается через *Ff*.

Если на тело действует исключительно сила трения, то рассматриваемый процесс в соответствии со вторым законом Ньютона описывается уравнением



Сила трения должна действовать в сторону, противоположную направлению движения, и зависеть от скорости тела. В простейшем случае такую зависимость можно считать линейной (как и ранее в уравнениях движения планера). Для малых колебаний маятника это допущение достаточно точно соответствует действительности, хотя в ряде случаев приходится допускать и более сложный характер этой зависимости[[17]](#endnote-17). Таким образом, силу трения можно вычислять по формуле  где положительная константа *μ* является параметром процесса и называется ***коэффициентом трения***.

Итак, уравнение движения под действием силы трения приводится к виду

 (3.9)

где *τ* = *m/μ* – параметр процесса. Попытаемся прояснить физический смысл этого коэффициента. Функция состояния *х* (длина) измеряется в метрах, ее производная, т.е. скорость  – в метрах в секунду, а ускорение  – в метрах, деленных на секунду в квадрате. Для того чтобы равенство (3.9) имело смысл, необходимо, чтобы оба слагаемые в его левой части измерялись в одних и тех же единицах[[18]](#endnote-18). В результате заключаем, что параметр *τ* измеряется в секундах, т.е. имеет смысл времени. Его называют ***временем релаксации***. Эта величина показывает, как быстро сила трения тормозит движение тела.

Найдем решения уравнения (3.9). Определив скорость тела *v*=, установим уравнение первого порядка



Его решение с начальным условием *v*(0) = *v*0 , где *v*0 – начальная скорость тела, имеет вид (см. Рис. 3.4)

*v*(*t*) *= v*0 exp(-*t*/*τ*). (3.10)

Итак, скорость тела со временем убывает под действием силы трения, причем тем быстрее, чем меньше время релаксации или, что эквивалентно, чем больше коэффициент трения (т.е. чем больше влияние силы трения).



Рис. 3.4. Решение уравнения движения тела под действием силы трения.

Для нахождения закона изменения положения тела в пространстве решаем уравнение  = *v* с соответствующими начальными условиями. В результате находим функцию

*x*(*t*) = *x*0 + *τ* *v*0 [1 – exp (-*t*/*τ*)], (3.11)

где *x*0 – начальное положение тела. Нетрудно убедиться, что функция *х* со временем возрастает (см. Рис. 3.4).

Определим свойства решения задачи при неограниченном возрастании времени. Из соотношений (3.10), (3.11) находим значения пределов при неограниченном возрастании времени, т.е. *t*→∞



Итак, со временем скорость тела падает и стремится к нулю, а его положение достигает некоторого предельного значения *x*\* = *x*0 + *τ* *v*0 (см. Рис. 3.4). Таким образом, под действием силы трения тело, в конце концов, остановится на расстоянии *τv*0 от точки *x*0, где она находилась в начальный момент времени.

Отметим, что при *τ*→∞ или, что то же самое, при *μ*→0 сила трения стремится к нулю. Тогда из формулы (3.10) следует, что скорость тела равна *v*(*t*) = *v*0, т.е. мы имеем дело с равномерным движением. Это вполне естественно – в отсутствии каких-либо сил скорость тела, конечно же, не меняется.

Обратимся теперь к исследованию движения маятника при наличии силы трения. В этом случае на рассматриваемый объект помимо тяготения действует также сила трения *Ff*, прямо пропорциональная угловой скорости движения маятника. В результате получаем соотношение



Вводя обозначение *τ* = *ml/μ*, установим уравнение движения маятника при наличии трения

 (3.12)

При  *ω*0 = 0 оно дает соотношение (3.9), а при *τ* → ∞ сводится к уравнению гармонического осциллятора (3.3). Отметим, что в данном случае масса маятника будет параметром процесса, оказывающим существенное влияние на время релаксации.

Найдем какое-либо частное решение уравнения (3.12). Можно предположить, что, оно будет складываться из периодической функции, подобной решениям (3.5) или (3.6) уравнения гармонического осциллятора (3.3), и экспоненциально убывающей функции, аналогичной решению (3.11) уравнения (3.9). Таким образом, решение задачи можно попытаться искать в виде

*θ*(*t*) = exp(-*βt*) sin(*ωt*), (3.13)

где параметры *β* и *ω* подбираются так, чтобы обеспечить выполнение равенства (3.12). Нетрудно убедиться, что они равны[[19]](#endnote-19)

*β* = *τ*/3, 

Согласно формуле (3.13), дающей решения уравнения (3.12) с начальными условиями



колебания маятника при наличии трения затухают (см. Рис. 3.5). При этом частота затухающих колебаний *ω* меньше частоты собственных колебаний *ω*0 и стремится к ней при неограниченном возрастании времени релаксации.

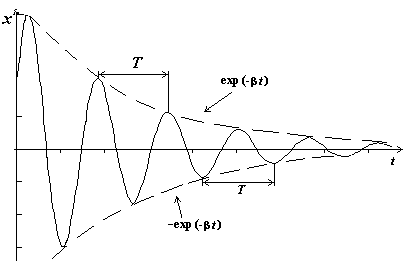


Рис. 3.5. Затухающие колебания маятника.

**Задание 3.3. *Малые колебания маятника с трением.*** На основе численного решения задачи (3.12), (3.4) провести следующий анализ:

1. Убедиться в том, что маятник совершает затухающие колебания.
2. Убедиться в том, что на фазовой плоскости (см. Задание 3.1) рассматриваемому движению соответствует закручивающаяся спираль.

3. Выводя на экран сумму кинетической и потенциальной энергии, убедиться в том, что со временем это значение стремиться к нулю.

4. Оценить влияние массы маятника, его длины и коэффициента трения на скорость затухания колебаний.

5. Задавая достаточно большие значения коэффициента трения, обнаружить монотонное затухание колебаний.

***При наличии трения колебания маятника со временем затухают.***

#### **5. Положение равновесия маятника**

Отметим одно специфическое частное решение уравнения гармонического осциллятора, резко отличающееся по своим свойствам от всех прочих. При *θ*0 = 0, *υ*0 = 0 из формулы (3.6) при *t =* 0 выводятся соотношения

*a* sin*ϕ* = 0, *aω*0 cos*ϕ* = 0.

Отсюда следует, что *a* = 0, а значит, решение уравнения (3.3) тождественно равно нулю. Этот любопытный результат имеет естественный физический смысл. Маятник, изначально находящийся в вертикальном положении и покоящийся, неизменно остается в этом состоянии. С математической точки зрения состояние динамической системы, не меняющееся со временем, называется ***положением равновесия***. При качественном исследовании динамической системы чрезвычайно важно знать ее возможные положения равновесия, поскольку, если система все-таки выходит со временем в какое-либо состояние, то последнее непременно будет положением равновесия.

В рассматриваемом случае мы сначала выделили весь класс решений задачи, а потом обнаружили среди великого множества частных решений положение равновесия. Было бы очень печально, если бы для нахождения положения равновесия системы непременно требовалось априорное знание решения задачи. Дело в том, что нелинейные дифференциальные уравнения, наиболее части встречающиеся в приложениях, практически не поддаются аналитическому решению.

К счастью, для нахождения положений равновесия системы не обязательно знать ее аналитическое решение. Действительно, обозначив теперь через *υ* угловую скорость маятника, приведем уравнение второго порядка (3.3) к эквивалентной ему системе двух дифференциальных уравнений первого порядка



Очевидно, положение и скорость маятника со временем не будут меняться исключительно в том случае, когда их производные равны нулю. Отсюда следует, что правые части приведенных выше уравнений обращаются в нуль, что и позволяет найти положение равновесие маятника.

Положения равновесия могут существенно различаться своими свойствами[[20]](#endnote-20). В случае ***асимптотически устойчивого положения равновесия*** малое отклонение системы от этого состояния приводит к непременному возвращению в это состояние. Примером такого положения равновесия является нулевое состояние для колебания маятника с учетом трения[[21]](#endnote-21). Отметим, что в отсутствии трения маятник, имеющий какое-либо малое отклонение от нижнего вертикального положения или ненулевую начальную скорость, будет колебаться вокруг положения равновесия, но не вернется к нему окончательно[[22]](#endnote-22). Таким образом, мы не имеем дело с асимптотически устойчивым положением равновесия. В то же время у нас есть определенная уверенность в том, что маятник навсегда останется в некоторой окрестности положения равновесия, а не удалится от него. В подобном случае положение равновесия называют ***устойчивым по Ляпунову***. Пример ***неустойчивого положения равновесия*** дает уравнение нелинейных колебаний маятника, см. Приложение.

**Задание 3.4. *Положение равновесия для уравнения малых колебаний маятника.*** Провести следующий анализ:

1. Решая численно уравнение (3.3) с нулевыми начальными значениями положения и скорости маятника для, убедиться, что он останется в равновесии. При этом состояние системы со временем не меняется, а соответствующая фазовая кривая вырождается в точку.

3. Задавая малые значения начального положения или начальной скорости, убедиться, что состояние системы не стремится к положению равновесия, но остается в некоторой его окрестности, что соответствует устойчивости положения равновесия по Ляпунову.

3. Пользуясь описанной выше методикой, убедиться теоретически в том, что для уравнения малых колебаний маятника при наличии трения (3.12) нулевые значения начального положения и начальной скорости маятника будут положением равновесия системы.

4. С помощью численного анализа уравнения (3.12) убедиться в том, что нулевые начальные значения положения и скорости маятника также соответствуют положению равновесия системы.

5. Убедиться в том, что при ненулевых начальных значениях положения и скорости маятника решение уравнения (3.12) стремится к положению равновесия, что соответствует его асимптотической устойчивости.

***Положение равновесия есть такое частное решение дифференциального уравнения, которое всегда остается неизменным.***

#### **6. Вынужденные колебания маятника**

На практике представляет интерес также вынужденные колебания маятника. Предположим теперь, что на маятник действует периодическая внешняя сила   
*Fex*(*t*) = *F*0 sin*ωt*, где амплитуда силы *F*0 и частота вынужденных колебаний *ω* служат параметрами задачи. Исследуемый процесс будет описываться уравнением

+*θ* = *a*0 sin*ωt*, (3.14)

где *a*0 = *F*0/*m*. В виду наличия ненулевого члена, не зависящего от искомой функции, данное уравнение является ***неоднородным***. С помощью непосредственной подстановки легко убедиться в том, что данное уравнение имеет частное решение



Таким образом, колебание маятника при наличии периодической внешней силы осуществляется с частотой вынужденных колебаний. При этом амплитуда колебания тем больше, чем ближе частоты вынужденных и собственных колебаний. Резкое возрастание амплитуды колебаний при стремлении величины *ω* к *ω*0 называется ***резонансом***.

При *ω* = *ω*0 приведенная выше формула не имеет смысла. Однако эксперимент показывает, что при совпадении указанных частот мы получаем колебания с конечной амплитудой. Таким образом, в случае близости частоты *ω* к *ω*0 приведенное выше уравнение уже не описывает исследуемый процесс с достаточной степенью точности. Для уточнения математической модели рассматривают вынужденные колебания маятника с учетом трения, описываемые уравнением

 (3.15)

Его частное решение можно искать в форме

*θ*(*t*) = *a* sin(*ωt + ϕ*),

где



При *ω* = *ω*0 амплитуда колебания конечна и равна *а*\*= * а*\* /*ω*0. Тем самым при совпадении частот вынужденных и собственных колебаний маятника и наличии трения также наблюдается явление резонанса. В данном случае оно характеризуется тем, что в этих условиях амплитуда достигает своего максимального значения.

**Задание 3.5. *Вынужденные колебания маятника.*** Провести следующий анализ.

1. Провести расчеты уравнения (3.14) с начальным условием (3.4), что соответствует математической модели вынужденных колебаний маятника без трения для случая, когда частота вынужденных колебаний втрое больше и втрое меньше собственной частоты. Обратить внимание на график изменения со временем положения маятника и его скорости, а также на фазовый портрет системы. Проанализировать полученные результаты.

3. Провести расчеты уравнения (3.15) с начальным условием (3.4), что соответствует математической модели вынужденных колебаний маятника при наличии трения. Обратить внимание на поведение системы на достаточно большом интервале времени.

3. Провести расчеты задачи (3.15), (3.4) с различными значениями частоты вынужденных колебаний. Построив график зависимости от нее амплитуды колебания, обнаружить явление резонанса.

***Колебание маятника при наличии периодической внешней силы   
осуществляется с частотой вынужденных колебаний.***

***По мере приближения частоты вынужденных колебаний   
к частоте собственных колебаний амплитуда возрастает,   
что соответствует явлению резонанса.***

**Направление дальнейшей работы**. В последующей лекции рассматриваются электрические колебания, которые описываются уравнениями, близкими к уравнениям механических колебаний.

### **ПРИЛОЖЕНИЕ**

К колебанию маятника достаточно близок процесс движения пружины, который при естественных предположениях также описывается уравнением гармонического осциллятора[[23]](#endnote-23). Существенно более сложные и подчас неожиданные решения возникают в задачах о нелинейных колебаниях. Мы рассмотрим здесь не только общее уравнение колебания маятника (3.2), но и некоторые специальные задачи теории нелинейных колебаний[[24]](#endnote-24).

#### **1. Колебание пружины**

Еще один классический пример механических колебаний дает движение пружины. Рассматривается пружина, один конец которой жестко закреплен, а к другому присоединено тело массой *m.* В естественном состоянии пружина считается неподвижной. Однако при ее сжатии или растяжении возникает сила, стремящаяся возвратить пружину в исходное положение (см. Рис. 3.6). Движение тела на пружине описывается функцией   
*х=х*(*t*), характеризующей отклонение тела от его равновесного состояния в момент времени *t*.

При малых отклонениях пружины от состояния равновесия в соответствии с ***законом Гука*** на тело будет действовать ***сила упругости*** *Fe*, направленная в сторону равновесия и пропорциональная значению отклонения *х* (более сложный характер зависимости силы от положения используется для рассматриваемой ниже пружины Дуффинга). Таким образом, справедливо равенство *Fe = -kx*, где константа *k* называется ***коэффициентом упругости*** и является параметром задачи. Подставляя значение силы в уравнение движения



получаем



где  Оно называется ***уравнением колебания пружины***[[25]](#endnote-25) и с точностью до смысла входящих в него величин совпадает с уравнением гармонического осциллятора[[26]](#endnote-26). Тем самым движение пружины в значительной степени напоминает движение маятника[[27]](#endnote-27).



Рис. 3.6. Колебание пружины.

**Задание 3.6. *Колебание пружины.*** На основе численного решения уравнения колебания пружины провести следующий анализ.

1. Установить изменение со временем положения и скорости движения пружины. Проанализировать полученные результаты. Обратить внимание на аналогию между колебанием пружины и маятника.

3. Определить аналитически закон сохранения энергии для колебания пружины. Установить изменение со временем ее кинетической, потенциальной и полной энергии.

3. Записать уравнение колебания пружины при наличии трения. Провести расчеты для колебания пружины при наличии трения. Проанализировать полученные результаты.

#### **2. Большие колебания маятника**

Основным объектом исследования здесь является уравнение (3.2)



В силу нелинейности установить его аналитическое решение весьма затруднительно, что однако не препятствует его компьютерному анализу на основе известных методов приближенного решения.

**Задание 3.7. *Нелинейные колебания маятника***. На основе численного решения задачи (3.2), (3.4) провести следующий анализ:

1. Убедиться, что при малых значениях начального положения и начальной скорости системы решение уравнения нелинейных колебаний достаточно близко к решению уравнения гармонического осциллятора.

3. Увеличивая начальное отклонение или начальную скорость маятника, добиться больших расхождений в решениях линейного и нелинейного уравнений.

3. При достаточно больших начальных состояниях системы обнаружить вращение маятника вокруг точки подвеса.

4. Установить закон сохранения энергии в случае нелинейных колебаний маятника. Для этого следует провести рассуждения, аналогичные приведенным выше, заменив уравнение (3.3) на (3.2) без аппроксимации косинуса квадратичной функцией.

5. Построить график зависимости от времени кинетической, потенциальной и полной энергии маятника в случае нелинейных колебаний.

Установим положение равновесия для уравнения (3.2). Оно приводится к системе



Приравнив**а**я нулю правые части этих уравнений, находим значения *θ*=*nπ*, *υ* = 0. Таким образом, любому целому числу *k* соответствует свое положение равновесие. Этот поразительный результат показывает, что при анализе нелинейных систем могут возникнуть существенные сложности и поразительные эффекты. Тем не менее, именно нелинейность окружающего нас мира наделяет его потрясающими, удивительными и неповторимыми свойствами. Жить в линейном мире было бы невообразимо скучно, не говоря уже о том, что сама по себе жизнь ассоциируется исключительно с нелинейными системами.

**Задание 3.8. *Положение равновесия для нелинейных колебаний маятника.*** Провести следующий анализ:

1. Решая численно уравнение (3.2) с нулевыми начальными значениями положения и скорости маятника, убедиться в том, что он останется в равновесии. При этом состояние системы со временем не меняется, а фазовая кривая вырождается в точку.

3. Задавая малые значения начального положения или начальной скорости, убедиться в том, что состояние системы не стремится к положению равновесия, но остается в некоторой его окрестности, что соответствует устойчивости положения равновесия по Ляпунову.

3. Задать начальное отклонение маятника равным *π* и нулевую начальную скорость, что соответствует нахождению маятника в крайней верхней точке. Убедиться в том, что при этих условиях маятник остается в равновесии. Наблюдать процесс рекомендуется на малом интервале времени.

4. Задавая незначительное отклонение положения маятника от указанного выше состояния равновесия, убедиться в том, что маятник покидает окрестность равновесного состояния, что соответствует ***неустойчивому*** положению равновесия.

5. Вновь задать начальное отклонение маятника равным *π* и нулевую начальную скорость, но наблюдать систему на продолжительном интервале времени. Убедиться в том, что со временем маятник выйдет из положения равновесия. Объяснить полученный результат.

Для больших колебаний маятника при наличии трения уравнение движения по аналогии с соотношениями (3.2) и (3.12) имеет вид

 (3.16)

В отсутствии трения (при *μ* = 0) при малых начальных данных оно аппроксимируется классическим уравнением гармонического осциллятора, и маятник совершает колебания вокруг положения равновесия *θ* = 0. При достаточно больших начальных данных наблюдается круговое вращение маятника с постоянным ростом угла и периодическим изменением скорости вращения. Учет трения приводит к постепенному замедлению вращения маятника с последующим переходу на режим затухающих колебаний.

**Задание 3.9. *Нелинейные колебания маятника при наличии трения.*** На основе численного решения уравнения (3.16) с начальными условиями (3.4) провести следующий анализ.

1. Провести расчеты при сравнительно небольших начальных состояний системы. Объяснить полученные результаты.

3. Провести расчеты для достаточно больших начальных состояний и малом значении коэффициента трения.

3. Для достаточно больших начальных состояний и сравнительном большом значении коэффициента трения обнаружить переход от вращения маятника к его затухающим колебаниям.

#### **3. Задачи нелинейной теории колебаний**

Рассмотрим еще несколько задач, связанных с нелинейными механическими колебаниями. Первым примером является ***пружина Дуффинга***[[28]](#endnote-28). В отличие от рассмотренной ранее обычной пружины, в которой сила упругости пропорциональна отклонению пружины от состояния равновесия, в данном случае указанная зависимость характеризуется следующим равенством *Ff=-*(*ax+bx*3), где *a* и *b* – некоторые положительные константы. Таким образом, рассматриваемый процесс описывается соотношением



называемым ***уравнением Дуффинга***. Можно установить, что в зависимости от значений входящих в него коэффициентов решение уравнения обладает весьма специфическими свойствами.

Еще один пример нелинейных колебаний дает ***маятник Фруда***[[29]](#endnote-29), в котором принята следующая зависимость силы трения от угловой скорости:



где *a* и *b* – некоторые положительные константы. В результате для больших колебаний при наличии внешней силы *F* получаем уравнение



Движение маятника Фруда имеет существенно более сложный характер по сравнению с большими колебаниями обычного маятника.

Отметим также ***маятник с силой, направленной в сторону движения***. Малые колебания такого маятника при наличии трения и внешней силы, описываются уравнением



Оказывается, что при любых начальных данных маятник выходит на колебания с одной и той же амплитудой



где *h = k/*2*ml*,  – полупериод колебания[[30]](#endnote-30).

### **КОММЕНТАРИИ**

1. Построение математической модели движения маятника приводится в любом курсе классической механики, см., например, Buchholz, Kittel, Knudsen, Landau1, Mandelstam, Pierce; а также в специальной литературе по теории колебаний, см., например, Andronov, Crawford, KuznetsovA, Mandelstam, Pain. [↑](#endnote-ref-1)
2. Дифференциальное уравнение имеет ***порядок*** *n*, если максимальный порядок производной, входящий в данное уравнение есть *n*. [↑](#endnote-ref-2)
3. Более точно, уравнение ***нелинейно***, если оно не является линейным. Уравнение называется ***линейным***, если оно может быть записано в виде *Ax=f*, где *x* есть неизвестная величина, *A* – действующий на нее линейный оператор, т.е. преобразование, а *f* – известная величина. При этом оператор *A* называется ***линейным***, если для любых значений *x* и *y*, на которых он действует, и любых чисел *α* и *β* справедливо равенство *A*(*αx*+*βy*)=*αAx*+*βAy*. Применительно к уравнению (3.2) мы имеем

   При этом вторая производная, входящая в определение оператора *A*, представляет собой линейный оператор. Однако синус не является линейным преобразованием. Нелинейными являются также дифференциальные уравнения, приведенные в Приложении к Лекции № 1, а также в Приложении к рассматриваемой лекции. [↑](#endnote-ref-3)
4. Некоторые особенности нелинейных дифференциальных уравнений приводятся в лекциях № 5 и № 20. С элементами теории таких уравнений можно познакомиться в любом курсе дифференциальных уравнений, см., например, Arnold, Coddin, Hartman, Jordan, Lefsch, Polyanin, Teschl, Zwill. [↑](#endnote-ref-4)
5. Как уже отмечалось ранее, уравнение линейно, если оно представимо в виде *Ax=f*, где *A* есть линейный оператор. Линейное уравнение однородно при *f=*0. Именно линейные однородные уравнения обладают тем свойством, что сумма любых двух его решений и произведение любого решения на константу также являются решениями данного уравнения. С алгебраической точки зрения это означает, что множество решений рассматриваемого уравнения образует ***векторное*** или ***линейное пространство*** см., например, Hutson, Kolmogorov, Reed. [↑](#endnote-ref-5)
6. В частности, уравнение (3.3) описывает также электрические колебания, см. Лекция № 4. [↑](#endnote-ref-6)
7. Угол отклонения маятника от положения равновесия и его угловая скорость являются различными физическими характеристиками. Тем не менее, они удовлетворяют одному и тому же уравнению. Мы впервые сталкиваемся с ситуацией, когда конкретное уравнение имеет различные физические интерпретации. В Приложении будет рассмотрен процесс колебания пружины, а в Лекции № 4 – электрические колебания, которые также характеризуются рассматриваемым уравнением. [↑](#endnote-ref-7)
8. ***Задачей Коши*** для обыкновенного дифференциального уравнения *n-*ого порядкаявляется задача, включающее в себя рассматриваемое уравнение с дополнительными начальными условиями. Начальные условия предполагают известными значения искомой функции и всех ее производных до порядка *n*–1 включительно в некоторый момент времени (значение независимой переменной), являющийся началом отсчета. Аналогичным образом определяется задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнению. Имеет смысл и задача Коши для уравнений в частных производных, см., в частности, Лекцию № 11. [↑](#endnote-ref-8)
9. Линейное однородное обыкновенное дифференциальное второго порядка с постоянными коэффициентами в общем случае имеет вид

   где *a* и *b* – некоторые константы. Соответствующее ***характеристическое уравнение*** представляется собой квадратичное уравнение

   *λ*2+*aλ+b=*0.

   Если его корни *λ*1 и *λ*2 действительны и различны, то ***общее решение*** исходного уравнение определяется по формуле

   где *c*1 и *c*2 – произвольные постоянные. Если корни совпадают и равны некоторому действительному числу *λ*, то получаем

   .

   Наконец, если характеристическое уравнение имеет комплексные корни *λ*1=*α+β****i*** и *λ*2=*α*–*β****i***, то общее решение равно

   Именно последний случай характерен для уравнения (3.4), причем в данном случае *α*=0, *β=ω*. Вследствие этого последняя формула принимает вид (3.5). С различными вариантами решения линейного дифференциального уравнения второго порядка мы встретимся в Лекции № 10 в процессе анализа уравнения теплопроводности. [↑](#endnote-ref-9)
10. Некоторые свойства уравнения колебания маятника будут рассмотрены в Лекции № 5. [↑](#endnote-ref-10)
11. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что для любых значений *а* и *ϕ* формула (3.6) действительно дает решение уравнения (3.3). Таким образом, соотношения (3.5) и (3.6) эквивалентны. [↑](#endnote-ref-11)
12. Функция *x=x*(*t*) называется ***периодической***, если существует такое число *T*, называемое периодом, что справедливо равенство *x*(*t*)= *x*(*t+T*) для любого *t*. [↑](#endnote-ref-12)
13. Дифференцируя равенство (3.6), получаем

    Таким образом, скорость маятника также является периодической функцией с теми же частотой и периодом, но, естественно, с другой амплитудой. Собственно, в этом нет ничего удивительного, поскольку, как мы знаем, положение маятника и его скорость описывается одним и тем же уравнением. [↑](#endnote-ref-13)
14. В лекции № 5 фазовая плоскость будет существенным образом исследоваться для анализа решений дифференциальных уравнений. [↑](#endnote-ref-14)
15. Как видно из приведенных формул, потенциальная энергия определяется значением угла, а кинетическая энергия – угловой скоростью. Поскольку угол и скорость являются периодическими функциями, то естественно, что таковыми будут кинетическая и потенциальная энергии. [↑](#endnote-ref-15)
16. Различные проблемы, связанные с явлением трения, описываются в Mikhin. [↑](#endnote-ref-16)
17. Нелинейный характер зависимости силы трения от скорости движущегося тела рассматривается, например, в описанной в Лекции № 1 задаче о движении зонда, а также для описанного в Приложении маятника Фруда. [↑](#endnote-ref-17)
18. При описании движения тела под действием силы трения отмечалось, что все слагаемых, входящие в уравнение состояния должны иметь одинаковую размерность. Это естественное требование должно непременно выполняться для математических моделей любых явлений. [↑](#endnote-ref-18)
19. Определим производные функции *θ*

    Подставляя эти значения в равенство (3.12), будем иметь

    (*β*2 – *ω*2 +  – *β*/τ) exp(-*βt*) sin(*ωt*) + *ω*(1/*τ* – 2*β*) exp(-*βt*) cos(*ωt*) = 0.

    Для справедливости данного соотношения необходимо обратить в нуль коэффициенты перед тригонометрическими функциями. Второе слагаемое здесь равно нулю при выполнении условия *β* = *τ*/3. Обращаем в нуль первое слагаемое, полагая

    *ω*2 =  + *β* 2 – *β*/*τ* =  – (1/2 *τ*)3.

    Таким образом, находим частоту

    . [↑](#endnote-ref-19)
20. Более подробно исследование положений равновесия динамических систем проводится в лекции № 5. [↑](#endnote-ref-20)
21. Положение равновесия для свободных колебаний маятника при наличии трения классифицируется как устойчивый фокус (см. Лекция № 5). [↑](#endnote-ref-21)
22. Положение равновесия для свободных колебаний маятника в отсутствии трения классифицируется как центр (см. Лекция № 5). В последующих лекциях мы еще встретимся с понятием центра при рассмотрении уравнений Вольтерра – Лотки, имеющих чрезвычайно разнообразные интерпретации. [↑](#endnote-ref-22)
23. Еще одним примером механических колебания, характеризуемых в простейшем случае уравнением гармонического осциллятора, являются колебания шарика, находящегося в лунке (см. Рис. 3.7), KuznetsovA.

    Рис. 3.7. Колебание шарика в лунке. [↑](#endnote-ref-23)
24. Проблемы теории нелинейных колебаний рассматриваются, например, в Andronov, Gould, Hayashi, Jenkins, Jordan, Kharkevich, Kovacic, KuznetsovA, Moon, Naimark, Nayfeh, Pain. С нелинейными колебаниями в теории химических, биологических и др. систем мы столкнемся в последующих лекциях. [↑](#endnote-ref-24)
25. Можно рассмотреть колебание пружины при наличии трения, а также ее вынужденные колебания (см. Лекция № 4). Распределенным (бесконечномерным) аналогом колебания пружины можно считать процесс колебания струны (см. Лекция 13). При этом отклонение струны от положения равновесия меняется не только со временем, но и от точки к точке, т.е. функция состояния системы зависит от двух переменных. [↑](#endnote-ref-25)
26. Движение маятника и пружины обусловлено действием сил совершенно разной природы (гравитация и сила упругости, имеющая электромагнитную природу). И, тем не менее, эти процессы описываются абсолютно одинаковыми уравнениями. Еще большее удивление вызывает тот факт, что и электрические колебания также характеризуются уравнением гармонического осциллятора. Между этими процессами выявляется слишком много общего, чтобы это можно было списать на случайное совпадение. С подобной поразительной ситуацией мы еще не один раз столкнемся в дальнейшем. [↑](#endnote-ref-26)
27. В Лекции № 4 будет рассмотрены вынужденные колебания пружины. [↑](#endnote-ref-27)
28. О пружине Дуффинга и свойствах описывающего ее движения уравнения см. Kovacic, Jordan, Moon, Pain. [↑](#endnote-ref-28)
29. О маятнике Фруда см. Andronov, Kharkevich, Moon, Naimark, Pain. [↑](#endnote-ref-29)
30. Это явление связано с понятиями предельного цикла и автоколебаний, о которых пойдет речь в Лекции № 5. [↑](#endnote-ref-30)